Satz

Taylor Approximation

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) $(n+1)$-mal diff.bar.

Für jedes $a < x \leq b$, gibt es $\xi \in (a,x)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$T_n(f,x,a) = T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ist das Taylor Poly. von f vom Grad n, Entwicklungspunkt a.

Kor Sei $n \geq 0$, $a < x_0 < b$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in (a,b) $(n+1)$-mal stetig diff.bar.

Wir nehmen an dass

$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

1. Falls n gerade ist und x_0 lokale Extremastelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
2. Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ so ist x_0 ein strikte lok. Minimalstelle
3. Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0 ein str. lok. Max.

Kor $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in (a,b) 2-mal stetig diff-bar und $f'(x_0) = 0$

1. $f^{(2)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist str. lok. min
2. $f^{(2)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist " lok max

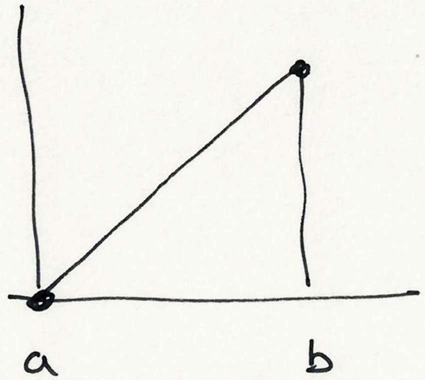
Auf der Suche nach Extrema einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$

① Bestimme alle kritische x_0 Punkte von f in (a, b)

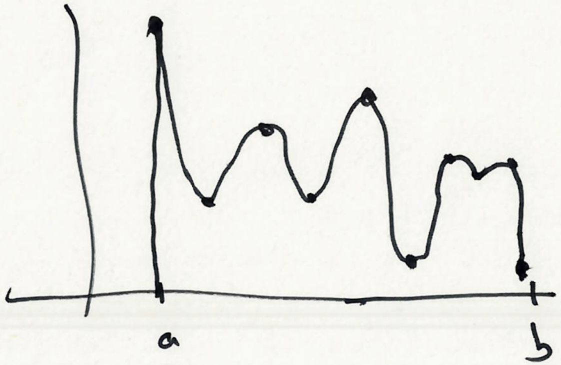
d.h. die Stellen x_0 mit

$$f'(x_0) = 0$$

② Vergleiche die Werte von f an jeder Kritischenstelle und an den Randstellen $x=a$, $x=b$.



$f(x) = x$



Taylor Reihen.

Defn sei $f \in C^\infty$ glatt

Die Taylorreihe der Funktion mit Entwicklungspunkt a ist die Potenzreihe

$$T_\infty(x; a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Bmk ① Der Taylorreihe einer C^∞ Funktion f ist im Allg nicht konvergent $\forall x$.

Ihre Konvergenz radius ρ kann $0, \infty$ oder endlich sein

Bsp ⓐ $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$a = 0$ $\quad$ Taylorreihe konv $\forall x$

ⓑ $$\frac{1}{1-x} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{} \qquad |x| < 1$$

$(a = 0)$

Bmk ② Falls die Taylorreihe konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x, a)$ nicht notwendigerweise gegen f!

Bsp. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f ist im Punkte $x=0$ stetig

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$$

Übung: $f'(0) = 0$

$f''(0) = 0$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall n.$

$$T_\infty(f,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Bsp. ① $\ln(1+x) \qquad x=0$

$f'(0) = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1 \qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$f''(0) = \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$

$\vdots$

$$\ln(1+x) \;\cancel{=}\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = T_\infty(f,0)$$

$T_\infty(f,0)$ konvergent für $|x| \leq 1$

② $f(x) = e^x$

$T_\infty(f,2) = ?$

$$e^x = e^2 \cdot e^{(x-2)} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^2 \frac{(x-2)^n}{n!}$$

(3) $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

Clicker Frage

$\sum (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n)!}$

$\sin x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\sum_n (-1)^n x^2 \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

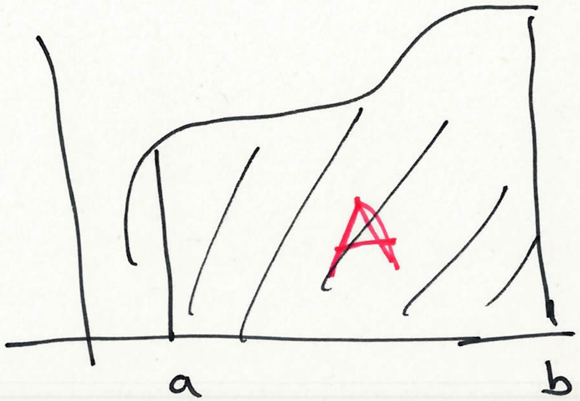
$= x^2 \underbrace{\sum (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!}}$

$= x^2 \cos(x^2)$

Kapitel 5

Das Riemann Integral.

Motivation $f: [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$



(1) Gesucht: Ist eine definition des Flächeninhalts A des Gebiets zwischen der x-Achse und dem Graph von f

(2) Gesucht: Ist eine "Stammfunktion" (Primitive) von f

d.h $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

s.d.

$$F'(x) = f$$

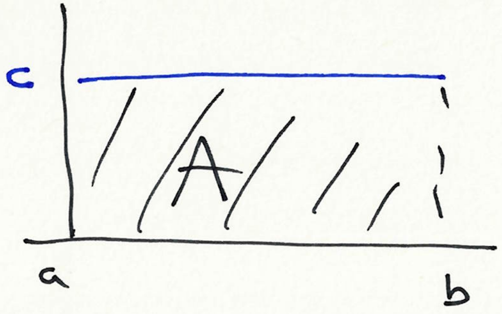
$$f(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$$

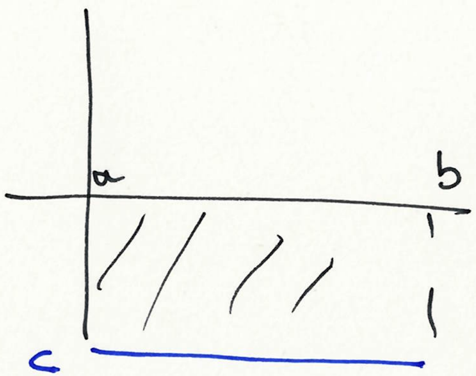
Idee:

1



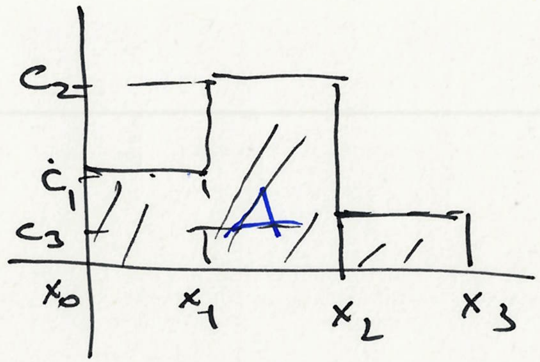
$$A = c(b-a)$$

Bmk.



$c < 0 \qquad c(b-a) < 0$

2 f ist konstant auf endliche viele Teilintervalles



$$(c_1)(x_1-x_0) + c_2(x_2-x_1)$$
$$+ c_3(x_3-x_2) = A.$$

Eine solche Funktion heissen Treppen Funktionen.

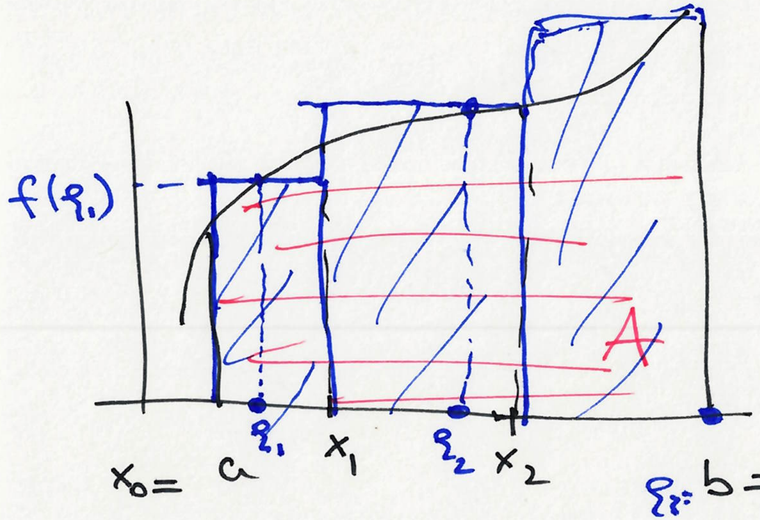
$$f(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k \cdot \chi_{I_k}$$

$$I_k = (x_{k-1}, x_k)$$

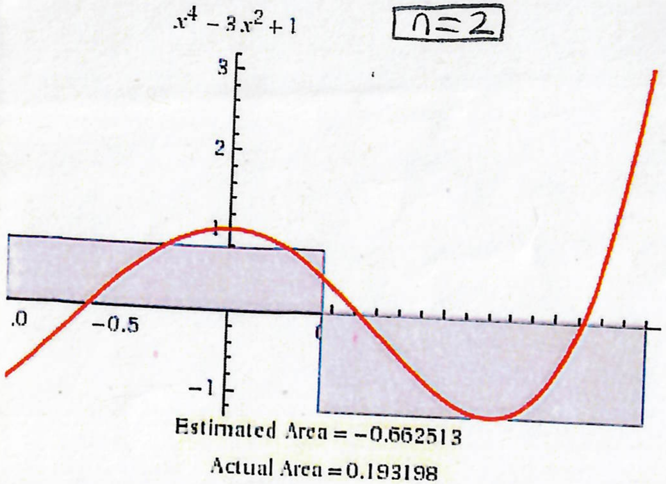
χ_{I_k} Karakteristische Funktion von I_k

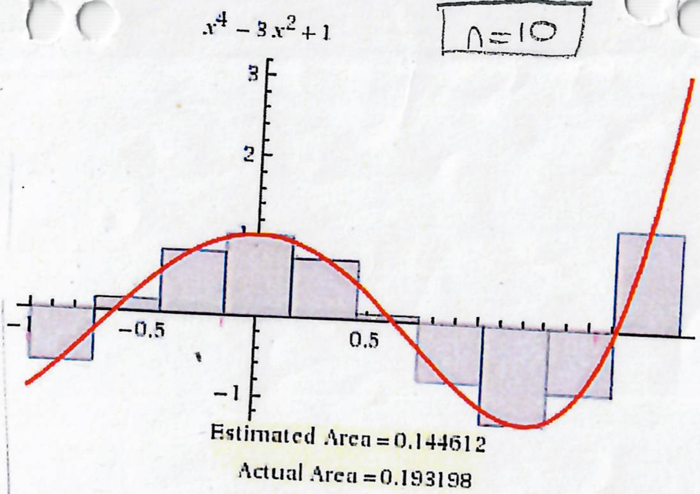
$$\chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_k \\ 0 & x \notin I_k. \end{cases}$$

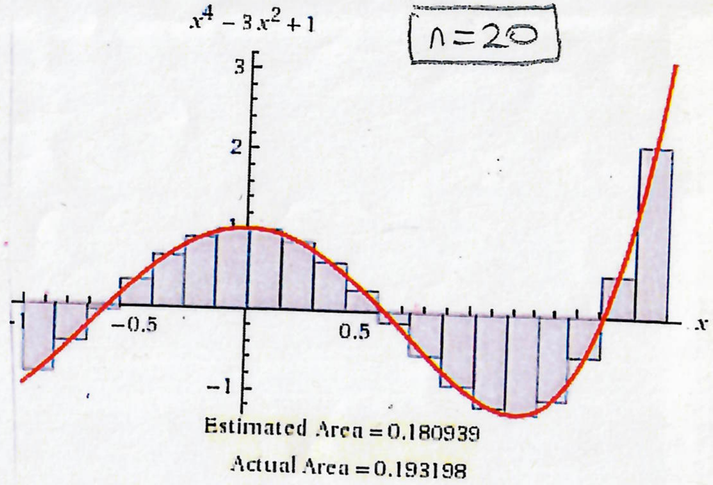
Idee.

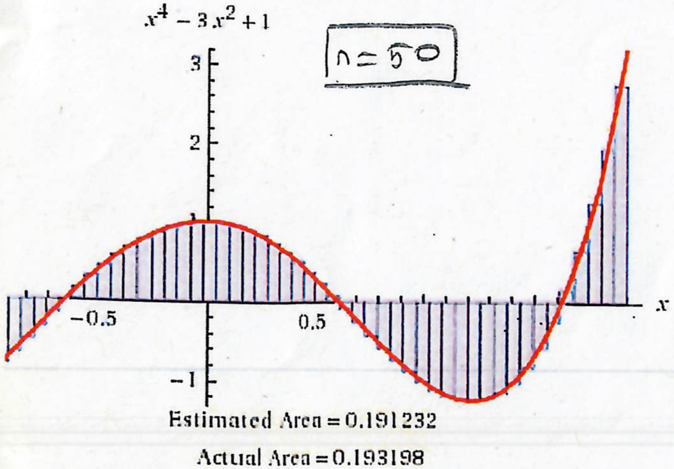


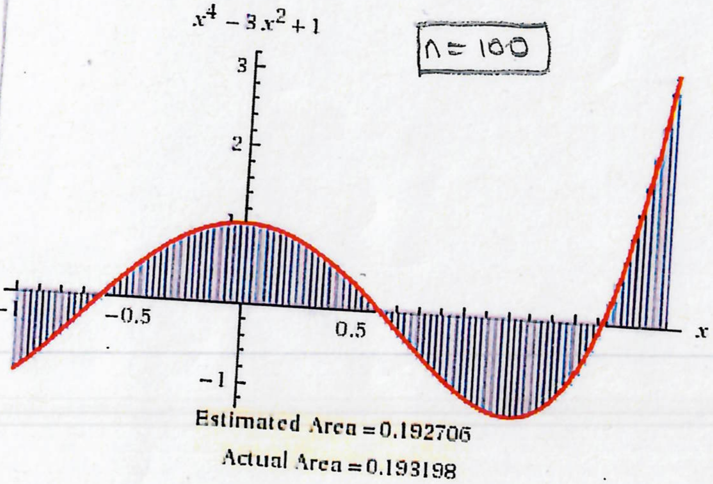
$A \approx B$ = Summe der Flächeninhalte von 3 Rechtecken

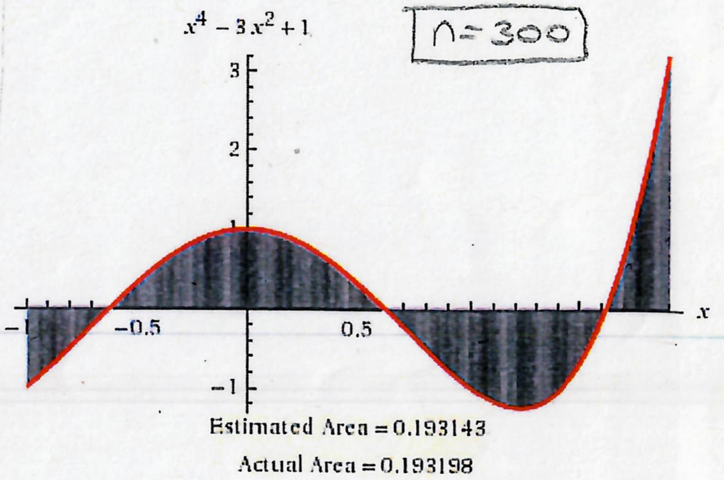












Generated using Wolfram Math World
Riemann Sum

$a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$

Idee des Integrals

① Aus jedem Teilintervalle I_k $k = 1, \dots, n$ ersetzen wir f durch eine Funktion die auf diesem Interval konstant ist. (und in einem noch klärenden Sinn nicht all zu stark von f absicht)

② Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese weise erhaltene Rechtecke

$$\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

③ Um den genauen Wert der Fläche festzulegen bilden wir immer feiner Zerlegungen des Intervals.

④ Dann untersuchen wir des Grenzwert verhalten diesen Summen

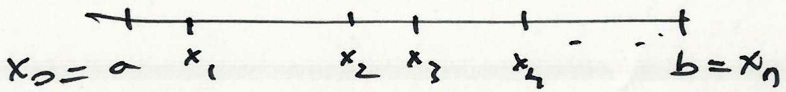
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

§ 5-1 Definition und Integrabilität Kriterien

Sei $I = [a, b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Defn (1) Eine **Partition** (Zerlegung, Einteilung) eines Intervals $I = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge

$$P = \{ a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b \} \subset I$$



wobei $\{a, b\} \subset P$.

Sei $\mathcal{P}(I)$ = Menge aller Partitionen von I

$= \{ P \subset I \mid P$ ist endlich Partition von $I \}$.

$\delta_i := x_i - x_{i-1}$ die **Länge** des Intervals $I_i = [x_{i-1}, x_i]$

(2) Die **Feinheit der Zerlegung** ist

$$\delta(P) := \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

③ Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen Punkten (Stützstellen)

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

$\xi := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

④ $$\boxed{S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

nennt man die Riemannsche Summe der Partition P und zwischen Punkte

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

d.h $\exists\, M \ge 0$

$|f(x)| \le M \quad \forall x \in [a, b]$.

Defn Die Untersumme

$$\boxed{\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x \in I_k} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})}$$

$(\underline{U}(f, P))$

und ihre Obersumme

$$\boxed{\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} f(x)\right)(x_i - x_{i-1}).}$$

$(O(f, P))$

Bmk.

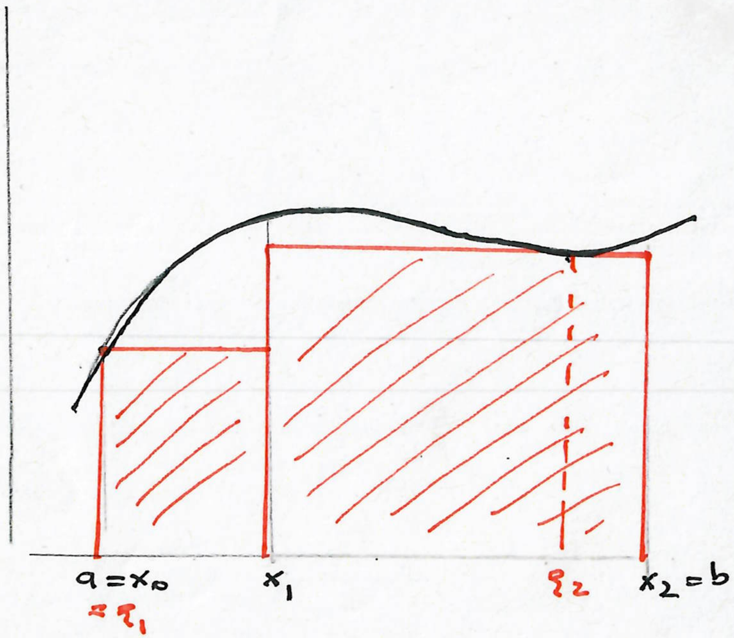
(1) $-M \leq \inf_{I_i} f \leq \sup_{I_i} f \leq M$

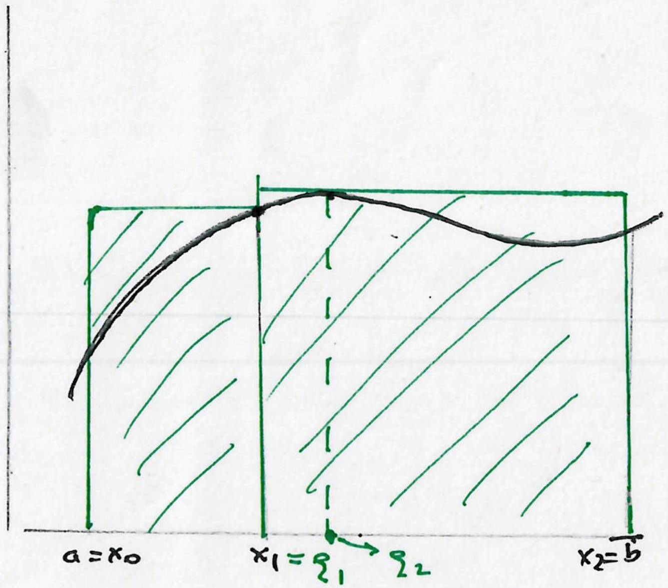
$\Rightarrow -M(b-a) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P)$

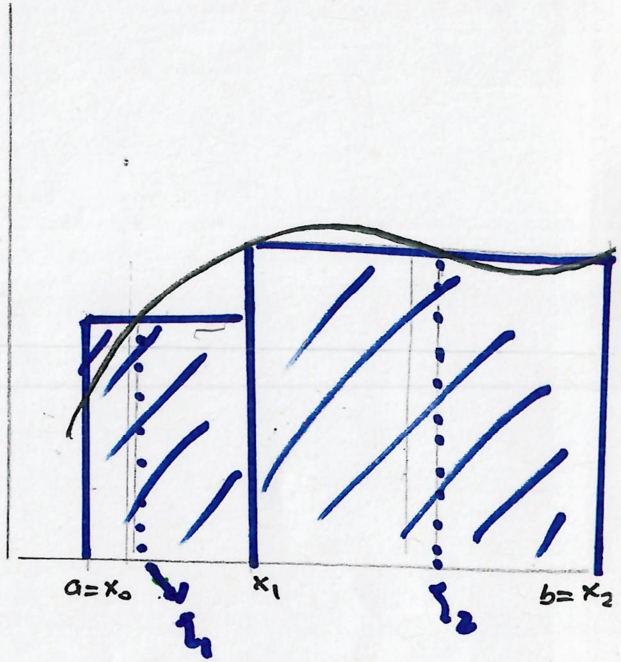
$\leq M(b-a)$

(2) Für jede andere Riem.-summe haben wir

$$\underline{S}(f,P) \leq S(f,P,\xi) \leq \overline{S}(f,P)$$







$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$

$\xi_{min} = \{\xi_1 = a, \xi_2\}$

Minimum punkte

$P = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$

$\xi_{Max} = \{\xi_1 = x_1, \xi_2\}$

Maximum Punkte

$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$

$\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$.

$$\underline{S}(f,P) = S(f,P,\xi_{min}) \leq \underline{S(f,P,\xi)} \leq S(f,P,\xi_{Max}) = \overline{S}(f,P)$$

5-9

Defn Eine Partition P' ist eine **Verfeinerung** von P falls $P \subset P'$

Vereinung $P_1 \cup P_2$, zweier Partionen ist wieder einer Partition.

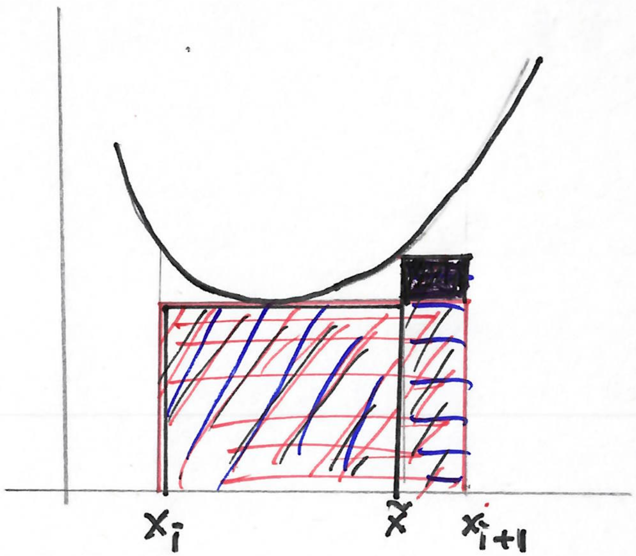
Insbesondee haben 2 Partitionen immer einer gemeinsame Verfeinerung $P_1 \cup P_2$

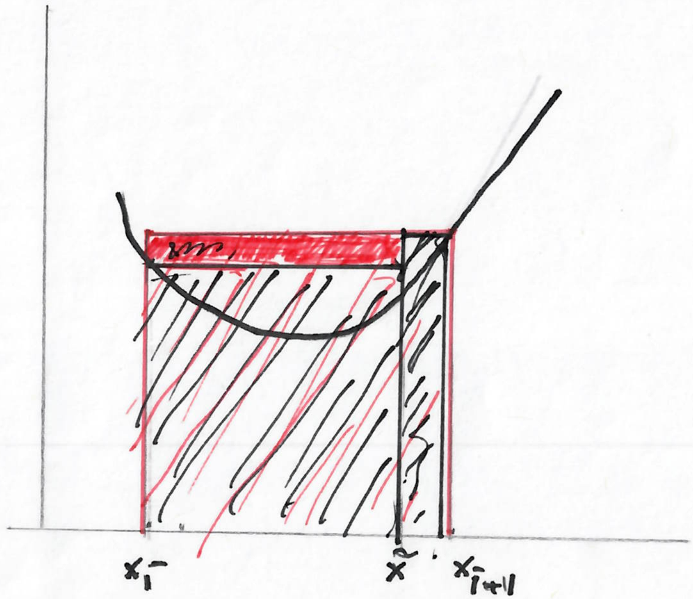
Lemma (1) $f: \overbrace{[a,b]}^{I} \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion

$P, Q \in \mathcal{P}(I)$

$P \subset Q \Longrightarrow$

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P).$$





$P = \{x_0, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_n\}$

$Q = \{x_0 \ldots \underbrace{x_i, \tilde{x}}, \underbrace{\tilde{x}, x_{i+1}}, \ldots x_n\}$

$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$

$P = \{x_0, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_n\}.$

$Q = \{x_0, \ldots x_i, \tilde{x}, x_{i+1}, \ldots x_n\}.$

$\overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$

5.11

Lemma ② Für beliebige Partitionen P, Q.

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q).$$

Insbesondere

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf_{Q\in\mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,Q)$$

Defn
$$\boxed{\underline{S}(f) := \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P)}$$

heisst das Untere Riemann Integral von f

$$\boxed{\overline{S}(f) := \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P).}$$

heisst das Obere Riemann Integral von f

Aus Lemma ② folgt das

$$\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$$

Defn Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist (Riemann) integrierbar falls $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)}$$

Bmk Das Symbol $\int$ ist ein "stilisierte S"

S für Summe.

$dx \sim \Delta x = x_i - x_{i-1}$

$f(x) \sim f(\xi_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

$f(x)$ = Integrand.

x = Integrationsvariable

a = untere Grenze des Integrals

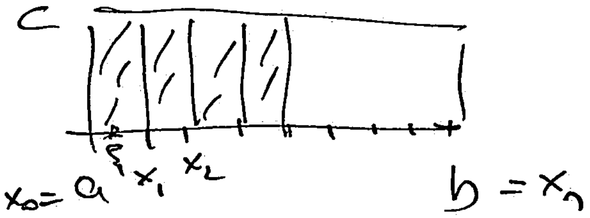
b = obere Grenze des Integrals.

Bsp. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto c$

konstante

Für alle $P \in \mathcal{P}(I)$



$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - x_{i-1})$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= c\,(b-a)$$

$$\underline{S}(f,P) = c\,(b-a)$$

$$\overline{S}(f,P) = c\,(b-a)$$

$$\underline{S}(f) = \sup_{P} \underline{S}(f,P) = c\,(b-a)$$

$$= \inf \overline{S}(f,P) = \overline{S}(f)$$

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$

✓

Bsp. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Char. func. von Rationalezahlen.

Sei $I_k \subset [0,1]$

ein Interval.

$\min_{I_k} f = 0$ da jede Teilmenge hat ein irrat. Punkt

$\max_{I_k} f = 1$

d.h $\underline{S}(f,P) = 0$.

$\overline{S}(f,P) = 1 \quad \forall P \in \mathcal{P}(I)$

~~$\forall P \in \mathcal{P}(I)$~~ ~~$\underline{S}(f)$~~

d.h $\underline{S}(f) = 0$

$\overline{S}(f) = 1$

$\Rightarrow f$ ist nicht integrierbar.

Kriterien für Integrierbarkeit.

Satz (Riemann. Kriterium)

(a) Eine beschränkte Funk auf $[a,b]$ ist integrierbar

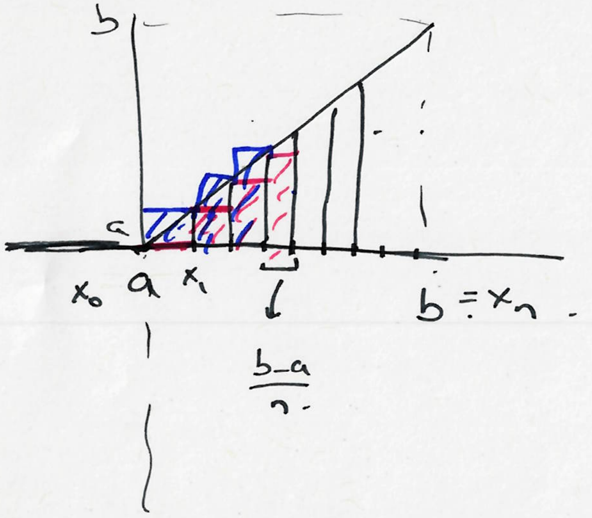
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(I)$

mit

$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.

Bsp. $f(x) = x$

$$|I_k| = \frac{b-a}{n} =: h \quad \forall k.$$



Sei $P_n = \{a + i\frac{(b-a)}{n} \mid 0 \le i \le n\}$.

Die uniform Partition

$$\underline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \cdot h$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= \cdots = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Analog $\overline{S}(f, P_n)$

$$= \sum_i f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\vdots$$

$$= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left[\frac{n+1}{n} - \frac{(n-1)}{n}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Für gegebene $\varepsilon > 0$

wähle n s.d. $\frac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ für diese P_n

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ Aus Riemann Kriterium x ist integrierbar !

$$\lim_{n \to \infty} \overline{S}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\nearrow 1}$$

$$= (b-a)\left[a + \frac{(b-a)}{2}\right]$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}.$$